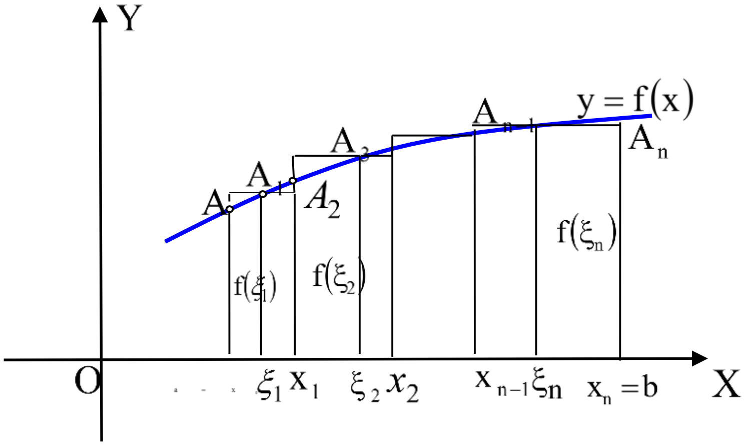
№5-дәріс.

Анықталған интеграл.

Тақырыбы: Ньютон-Лейбниц формуласы. Анықталған интегралдарды интегралдаудың негізгі әдістері. Анықталған интегралдардың қолданыстары.

Анықталған интеграл ертеректе жазық фигуралардың ауданын табу негізінде туындады. Ал қазір анықталған интеграл барлық техникалық ғылымдардағы аз шаманың үлкен сандарының қосындысын табуға арналған есептерді шешуде қолданылады.

Анықтама 1. Қисық сызықты трапеция деп Oxy жазықтығындағы Ox осімен, $x = a$ және $x = b$ түзулерімен шектелген облысты айтамыз, мұндағы $a < b$ және $y = f(x)$ функциясының графигі $[a, b]$ аралығында үзіліссіз (сурет 23).



Сурет 23

Қарапайымдылық үшін, $f(x) \geq 0$ деп қарастыралық, яғни, қисық сызықты трапеция Ox осінен жоғары орналасқан. Бұл қисық сызықты трапецияның ауданын жуық шамамен оны мәндері $f(x)$ функциясының кейбір таңдап алынған нүктелеріндегі мәндерге тең болатын табаны мен биіктіктері өте аз тік төртбұрыштардың аудандарының қосындысымен алмастыру көмегімен табуға болады.

Анықтама 2. $[a, b]$ кесіндісін тең n бөлікке бөлу деп осы кесіндіден алынған $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ сандар жиынтығын айтамыз, мұндағы $x_0 = a$ және $x_n = b$.

Әрбір бөлік $[x_{i-1}, x_i]$ кесіндіден қандай да бір $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ нүктесін аламыз, мұндағы $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Бұндай бөліктеуді T әрпімен, ал әр бөліктің ұзындығын $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ арқылы белгілейміз. $[a, b]$ кесіндісінде қандай да бір $y = f(x)$ функциясы анықталған болсын.

Анықтама 3. $y = f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісін T бөліктеуден тұрғызылған интегралдық қосындысы деп ξ_i таңдалынған нүктесіндегі функцияның мәнінің бөліктің ұзындығына көбейтінділерінің қосындысын айтамыз.

Бұндай қосындыны былай белгілейміз:

$$\sum_f(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Егер $f(x) \geq 0$, онда $\sum_f(T)$ интегралдық қосындысы табаны Δx_i және биіктігі $f(\xi_i)$ болатын тік төртбұрыштардан тұратын баспалдақты фигураның ауданына тең (сурет 1 қара), яғни, $\sum_f(T)$ қосындысы жуық шамамен оған сәйкес қисық сызықты трапецияның ауданына тең.

Анықтама 4. $y = f(x)$ функциясының $[a, b]$ кесіндісіндегі анықталған интегралы деп осы функцияның $[a, b]$ кесіндісін бөліктеудегі интегралдық қосындыларының Δx_i-дің максимал мәні нөлге ұмтылғандағы шегін айтамыз, яғни,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_f(T).$$

Егер $[a, b]$ аралығында $f(x) \geq 0$ болса, онда бұл интеграл сәйкес қисық сызықты трапецияның тура ауданын өрнектейді.

Теорема 1. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралығында үзіліссіз болса немесе осы кесіндіде бірінші түрдегі үзіліс нүктелерінің ақырлы сандары бар болса, онда бұл функция $[a, b]$ кесіндісінде интегралданады, яғни, $\int_a^b f(x)dx$ табылады.

Бұл теореманың мағынасы теореманың шарттары орындалғанда, қалай бөліктеуге байланыссыз, барлық кесінділердің Δx_i ұзындықтары нөлге ұмтылғанда, $\sum_f(T)$ интегралдық қосындысы тек бір ғана $\int_a^b f(x)dx$ санына ұмтылады.

Анықталған интегралдың қасиеттері.

Ары қарай, біз тек интегралданатын функцияларды ғана қарастырамыз.

1) $\int_a^b Cdx = C(b - a)$, C - тұрақты.

2) Егер $[a, b]$ кесіндісінде $f(x) \leq g(x)$ болса, онда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

3) Егер $[a, b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясы төменнен және жоғарыдан сәйкесінше m және M сандарымен шектелген болса, яғни, егер $[a, b]$ кесіндісінде $m \leq f(x) \leq M$ теңсіздігі орындалса, онда $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$ орынды.

Бұл тұжырымның дәлелдеуі бірінші және екінші қасиеттерден шығады. Бұл қасиеттер – анықталған интегралдың жоғарғы және төменгі жағынан бағалануы деп аталады.

Мысал 1. $\int_0^{10}(5 + \sin x^2)dx$ интегралын бағалайық.

$-1 \leq \sin x^2 \leq 1$ болғандықтан, $4 \leq 5 + \sin x^2 \leq 6$ болады. Бұдан,

$$40 \leq \int_0^{10}(5 + \sin x^2)dx \leq 60.$$

4) Орта мән туралы теорема.

$y = f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын, онда бұл кесіндіден $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$ теңдігі орындалатындай c нүктесі табылады. .

Бұл $f(c)$ мәні функцияның $[a,b]$ аралығындағы орта мәні деп аталады.

5) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Бұл қасиет *анықталған интегралдың модулын бағалау* деп аталады.

6) Егер $a < c < b$ теңсіздігі орындалса, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ .$$

7)Егер $a < b$ болса, онда $\int_b^a f(x)dx$ интегралы деп $-\int_a^b f(x)dx$ санын айтамыз.

8) Егер a=в болса, онда $\int_a^a f(x)dx$ =0.

6-қасиет a, b, c сандары қалай орналасса да ақиқат екендігін дәлелдеуге болады (егер интегралдың табылу шарты орындалса), яғни, $a < c < b$ орындалуы міндетті емес.

Интегралдың интегралдың жоғарғы шегі бойынша туындысы. Ньютон – Лейбниц формуласы.

Жоғарыда айтылғандардан басқа, анықталған интегралдардың басқа да бірнеше негізгі қасиеттері бар, біз оларды теоремалар түрінде берелік.

$f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде интегралданатын болсын және $a \le x \le b$. $x \in [a,b]$ үшін жаңа $y = \Phi(x)$ функциясын былай анықтайық:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \ .$$

Бұл жерде, $\Phi(x)$ жоғарғы шегі x айнымалысы болатын $y = f(t)$ функциясының интегралы арқылы өрнектеледі. Анықталған интегралда функцияның айнымалысын кез келген әріппен белгілеуге болатынын байқаймыз. Анықталған интегралдың анықтамасынан, оның шамасы бұдан өзгермейтіндігі шығады.

Теорема 2. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз болса, онда $y = \Phi(x)$ функциясы $y = f(x)$ функциясының (a,b) аралығындағы алғашқы функциясы деп аталады,яғни, бұл аралықта $\Phi'(x) = f(x)$.

Келесі теорема интегралдық есептеудегі негізгі теорема болып есептеледі, өйткені ол анықталмаған интегралды шешудің көмегімен анықталған интегралды шешу әдісі.

Теорема 3 (Ньютон - Лейбниц).

$y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз болсын және $y = F(x)$ функциясы осы аралықтағы оның алғашқы функциясы, онда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ .$$

Көбінде, $F(b) - F(a)$ айырмасы қысқа түрде былай жазылады:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \ .$$

Мысал 2.

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}.$$

Мысал 3. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$ есепте.

► $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx = \int_0^8 \sqrt{2x}\,dx + \int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{1}{2}\frac{(2x)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^8 + \frac{x^{4/3}}{4/3}\Bigg|_0^8 = \frac{1}{3}(16)^{3/2} + \frac{3}{4}(8)^{4/3} = 33\frac{1}{3}.$ ◄

Мысал 4. $\int_0^{\pi/2} sin^3 \varphi\, d\varphi$ тап.

► $\int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi\, d\varphi = -\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 \varphi\right) d(\cos\varphi) = -\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$ ◄

Анықталған интегралды интегралдау әдістері.

Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру.

Теорема 4. $y = f(x)$ функциясы $[a,b]$ аралығында үзіліссіз, ал $x = \varphi(t)$ функциясы $[\alpha,\beta]$ аралығында бірсарынды және үзіліссіз дифференциалданатын болсын, мұндағы $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, онда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Мысал 5. $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ интегралын есептелік, ол үшін $x = \sin t$ белгілеуін енгіземіз:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \Big| x = \sin t, dx = \cos t dt; (x = 0) \Rightarrow (\sin t = 0) \Rightarrow (t = 0); (x = 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin t = 1) \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2}\right)\Bigg| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt =$$

$$= \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Бұл интеграл центрі координат басында, бірінші квадрантта жататын радиусы бірге тең дөңгелектің ауданының төрттен бір бөлігіне тең.

Мысал 6. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$ интегралын есепте.

►Мынадай белгілеу енгізелік $\sqrt{1+x} = t$. Онда $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. Егер $x = 3$ болса, онда $t = 2 = \alpha$, ал егер $x = 8$ болса, онда $t = 2 = \alpha$.

Бұдан,

$$\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3 = 2(9-3)-2\left(\frac{8}{3}-2\right) = \frac{32}{3}. \blacktriangleleft$$

Мысал 7. Есепте: $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3}$.

$\blacktriangleright$ $tg(x/2) = u$ белгілеуін енгіземіз, онда $\cos x = (1-u^2)/(1+u^2)$, $dx = 2du/(1+u^2)$, $\alpha = tg0 = 0$, $\beta = tg(\pi/4) = 1$.

Бұдан,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3} = \int_0^1 \frac{2du/(1+u^2)}{2(1-u^2)/(1+u^2)+3} = \int_0^1 \frac{2du}{u^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg \frac{u}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}} arctg \frac{1}{\sqrt{5}} \approx$$

$\approx 0{,}38$. $\blacktriangleleft$

Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау әдісі.

Теорема 5. $y = u(x)$ және $y = v(x)$ функциялары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз дифференциалданатын болсын, онда мына теңдік орынды:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx .$$

Бұл теңдікті қысқаша түрде былай жазамыз:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

Мысал 8.

$$\int_1^e x\ln xdx = \int_1^e \ln xd\frac{x^2}{2} = \left| u=\ln x, du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{x^2}{2} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{e^2}{2}\ln e - 0 - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

Мысал 9. $\int_0^{\pi/2} x\cos xdx$ есепте.

$$\blacktriangleright \int_0^{\pi/2} x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos xdx, & v = \sin x \end{vmatrix} = x\sin\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin xdx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \cos x\Big|_0^{\pi/2} =$$

$= \frac{\pi}{2} - 1$. $\blacktriangleleft$

Мысал 10. $\int_1^e x\ln^2 xdx$ тап.

$$\blacktriangleright \int_1^e x\ln^2 xdx = \begin{vmatrix} u = \ln^2 x, & du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx, \\ dv = xdx, & v = \frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e - \int_1^e x\ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du\ \frac{1}{x}dx, \\ dv = xdx, & v = \frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\frac{1}{2}dx\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2-1). \blacktriangleleft$$

Анықталған интегралдардың қолданылуы.

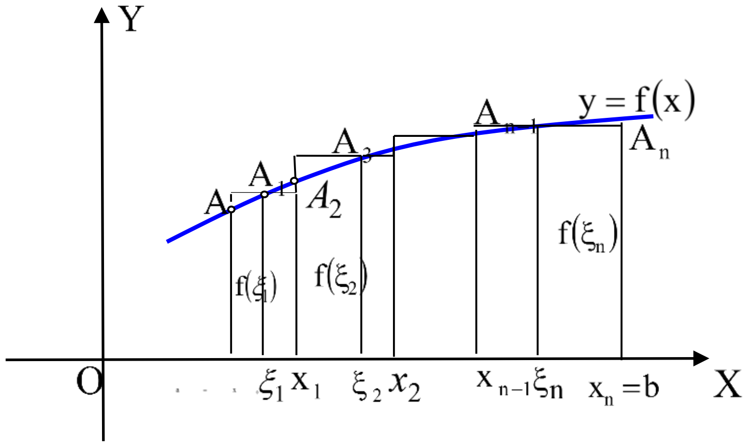
Анықталған интегралдың көмегімен облыстарының шекаралары әр түрде берілген жазық фигуралардың аудандарын, қисықтардың доғаларының ұзындықтарын, айналу денелерінің бүйір бетінің ауданы мен көлемдерін есептеуге болады.

1. Декарттық координаталар және полярлық координаталар жүйесінде берілген фигураның ауданы.

Декарттық координаталар координаталар жүйесінде берілген фигураның ауданы.

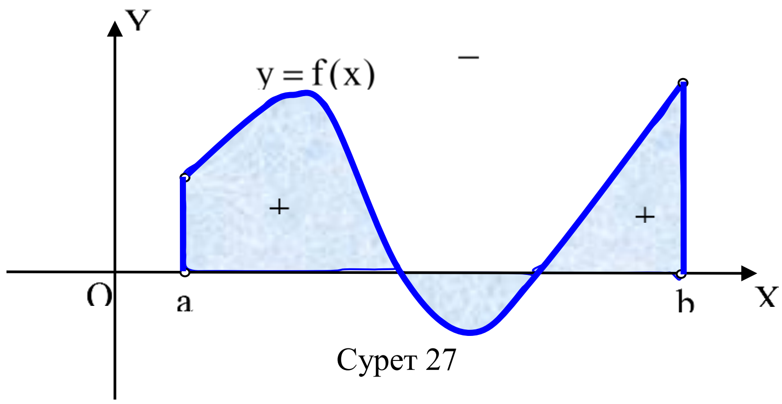
Егер [a,b] аралығында $y = f(x) \geq 0$ болса , онда $\int_a^b f(x)dx$ интегралы сәйкес қисық сызықты трапецияның ауданын өрнектейді.

Анықтама 1. Қисық сызықты трапеция деп Ox осімен, $x = a$, $x = b$ түзулерімен, мұндағы $a < b$ және $[a, b]$ аралығында үзіліссіз $y = f(x)$ функциясының графигімен шектелген Oxy жазықтығындағы облысты айтамыз (сурет 26).



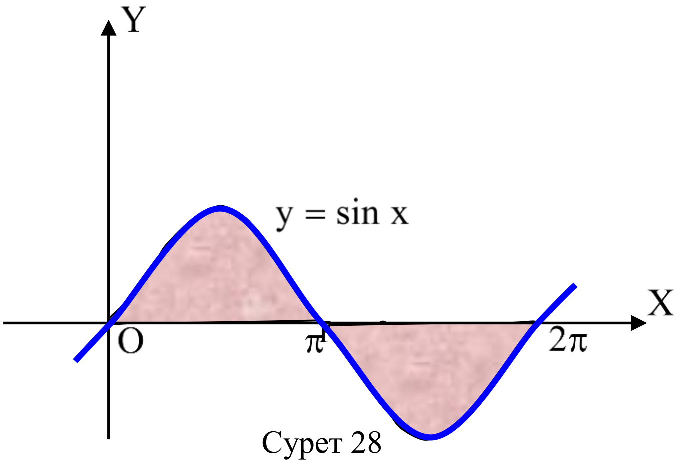
Сурет 26

Егер [a,b] аралығында $f(x) \leq 0$ болса, онда қисық сызықты трапеция Ox осінен төмен орналасқан және $\int_a^b f(x)dx \leq 0$. Бұл интеграл берілген трапецияның ауданын теріс санмен есептейтінін тексеру қиын емес. Жалпы жағдайда, егер $y = f(x)$ функциясы [a,b] аралығында таңбалары әртүрлі мәндер қабылдайтын болса, онда $\int_a^b f(x)dx$ оң таңбамен алынған Ox осінен жоғары жатқан қисық сызықты трапецияның ауданына теріс таңбамен алынған Ox осінен төмен орналасқан қисық сызықты трапецияның ауданын қосқанға тең. (сурет 27 қара).



Сурет 27

Мысал 1. $y = \sin x$ синусоидасымен және Ox осімен, $0 \le x \le 2\pi$ шектелген облыстың ауданын есепте (сурет 28).



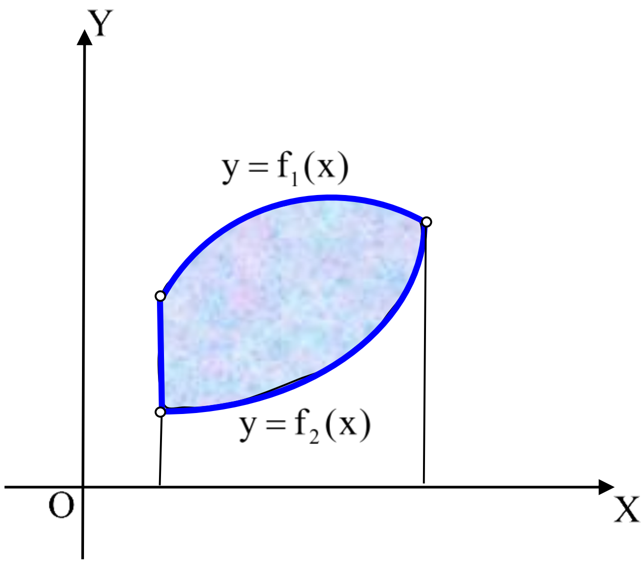
Сурет 28

$[0,\pi]$ аралығында $\sin x \ge 0$ және $[\pi, 2\pi]$ аралығында $\sin x \le 0$ болғандықтан, ізделінді аудан

$$S(G) = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} =$$
$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4 .$$

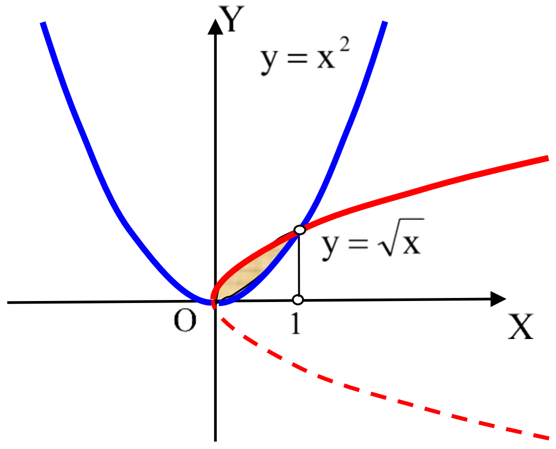
$x = a$, $x = b$ сызықтарымен және $[a,b]$ аралығында үзіліссіз $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ функцияларының графиктерімен, мұндағы $[a,b]$ аралығында $f_1(x) \ge f_2(x)$, шектелген G облысының ауданы мына формула бойынша есептелінеді:

$$S(G) = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx .$$



Сурет 29

Мысал 2. $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ параболаларымен шектелген G облысының ауданын тап (сурет 30).



Сурет 30

Теңдеулер жүйесін шешсек:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2, \end{cases}$$

бұл қисықтардың қиылысу нүктелерін табамыз: $(0,0)$ и (1,1). $[0,1]$ кесіндісінде $\sqrt{x}\ge x^2$ теңсіздігі орынды болғандықтан $S(G)=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Егер $y=f(x)$ функциясының графигі $[a,b]$ кесіндісінде параметрлік түрде берілсе:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \\ \alpha\le t\le\beta \end{cases}$$

мұндағы $y(t)\ge 0$ үзіліссіз, ал $x(t)$ - бірсарынды, $[\alpha,\beta]$ -да үзіліссіз дифференциалданатын функция және $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, онда бұл қисық сызықты трапецияға сәйкес аудан мынадай формула бойынша есептелінеді:

$$S(G)=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\,.$$

Бұған $\int_a^b f(x)dx$ интегралында жаңа белгілеу $x=x(t)$ енгізу арқылы көз жеткізуге болады.

Мысал 3. Жарты осьтері a және b болатын эллипстің ауданын тап. Эллипстің жоғарғы бөлігі мынадай параметрлік теңдеумен берілген қисық:

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \\ 0\le t\le\pi. \end{cases}$$

$t=0$ мәніне $x=a$ мәні, ал $t=\pi$ мәніне $x=-a$ мәні сәйкес келеді, онда бүкіл эллипстің ауданы:

$$S(G)=2\int_\pi^0 b\sin t(a\cos t)'dt=2ab\int_0^\pi \sin^2 tdt=2ab\int_0^\pi\frac{1-\cos 2t}{2}dt=ab\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^\pi=$$

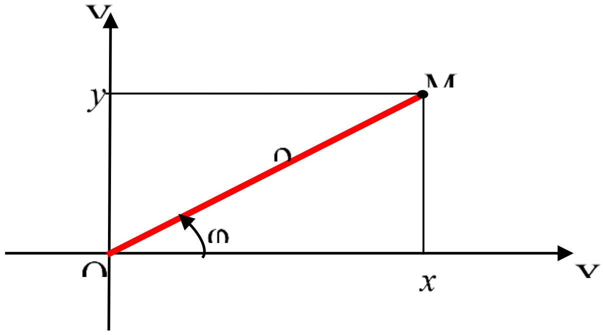
$$= ab\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right) - ab \cdot 0 = \pi ab \; .$$

Полярлық координаталар жүйесінде берілген қисықтармен шектелген фигураның ауданы.

Жазықтықтағы кейбір қисық сызықтарды полярлық координаталар жүйесінде берген ыңғайлы.

Жазықтықта декарттық координаталар жүйесі таңдалынып алынсын. Ox -тің оң жарты осін *полярлық ось* деп атап, ал O нүктесін полюс деп атаймыз. M - жазықтықтағы қандай да бір нүкте болсын.

M нүктесінен O нүктесіне дейінгі ара қашықтықты осы нүктенің *полярлық радиусы* ρ деп атаймыз. Полярлық ось пен $\overrightarrow{OM}$ векторының арасындағы бұрышты φ деп белгілейік. ρ мен φ сандары M нүктесінің *полярлық координаталары* деп аталады (сурет 31).



Сурет 31

ρ және φ сандары былай шектелген:

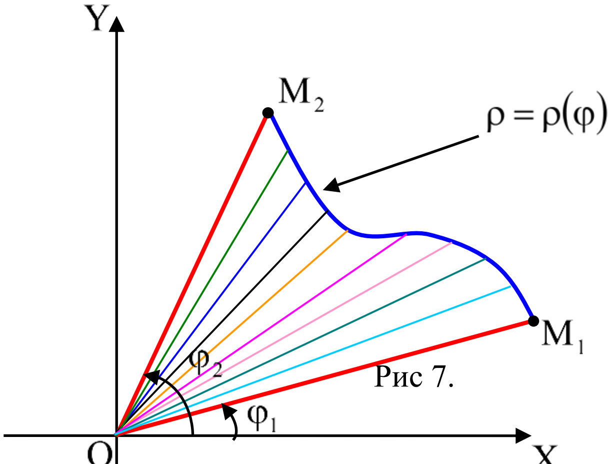
$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases}$$

(немесе $-\pi < \varphi \leq \pi$).

M нүктесінің декарттық және полярлық координаталарының арасында мынадай байланыс бар:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi , \\ y = \rho \sin \varphi . \end{cases}$$

Координат басынан шыққан $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ сәулелерімен, мұндағы $\varphi_1 < \varphi_2$ және $[\varphi_1, \varphi_2]$ кесіндісінде үзіліссіз теріс емес $\rho = f(\varphi)$ функциясының графигімен шектелген жазықтықтағы G облысы қисық сызықты үшбұрыш деп аталады (сурет 32).



Сурет 32

$[\varphi_1, \varphi_2]$ кесіндісін n бөлікке бөліп және әрбір бөлік қисық сызықты үшбұрыштың $\Delta\varphi_i$ ауданын радиусы $f(c_i)$ бұрышы $\Delta\varphi_i$ болатын дөңгелек секторлардың ауданымен ауыстырсақ , мынадай формуланы аламыз:

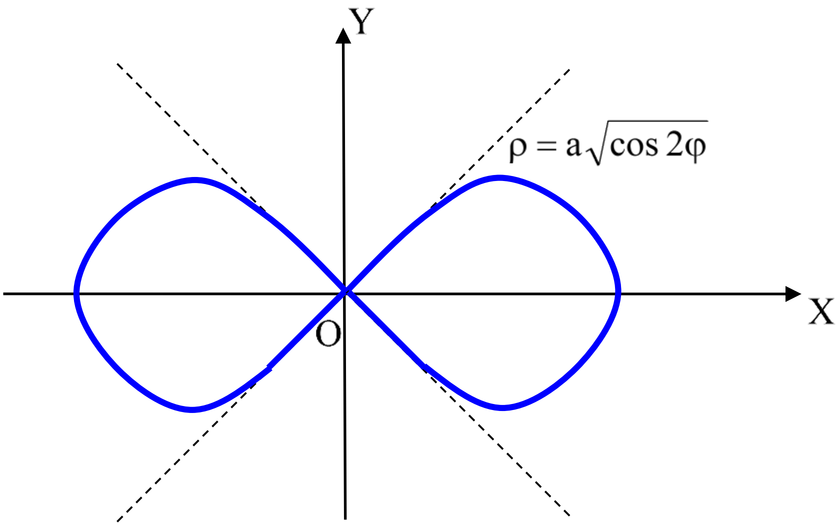
$$S(G) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f^2(c_i)\Delta\varphi_i .$$

Бұл жердегі қосынды $\rho = \frac{1}{2} f^2(\varphi)$ функциясының $[\varphi_1, \varphi_2]$ кесіндісіндегі интегралдық қосындысы. Соңғы теңдікте максимал $\Delta\varphi_i \to 0$ ұмтылды деп шекке көшсек, қисық сызықты үшбұрыштың ауданын тура есептейтін өрнек аламыз:

$$S(G) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi .$$

Мысал 4. $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ қисығымен шектелген фигураның ауданын тап.

Бұл қисық *Бернулли лемнискатасы* деп аталады. (сурет 33).



Сурет 33

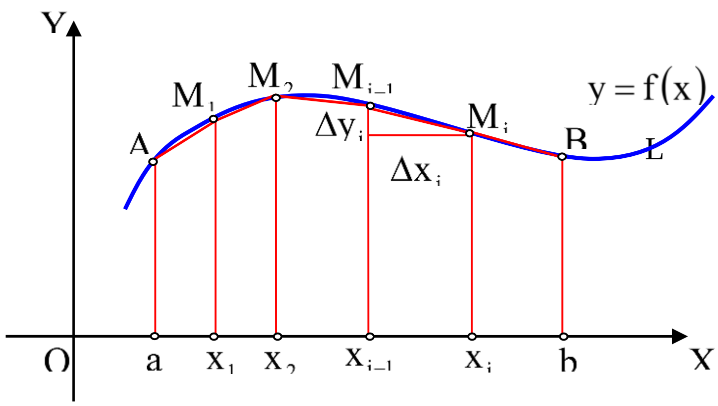
Интегралдау облысын алу үшін $\cos 2\varphi \ge 0$ шартын ескерсек, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$. Қисық сызықты үшбұрыштың $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ аралығындағы ауданын табу жеткілікті, яғни, барлық облыстың төрттен бір бөлігінің ауданын табамыз:

$$S(G) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/4} \left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= a^2 \sin\frac{\pi}{2} - a^2 \sin 0 = a^2 .$$

2. Қисықтың доғасының ұзындығын табу.

Жазықтықта ұштары A және B болатын L қисығы үзіліссіз дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының графигімен берілген, мұндағы $x \in [a, b]$. Бұл қисықты $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ нүктелерімен n бөлікке бөлеміз, мұндағы M_i нүктелерінің координаталары (x_i, y_i), $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $y_i - y_{i-1} = \Delta y_i$ (сурет 34).



Сурет 34

Төбелері жоғарыдағы таңдап алынған нүктелер болатын L қисығына іштей сызылған сынықтың ұзындығын I_n деп белгілейік:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}\ .$$

Анықтама 2. L **қисығының ұзындығы** деп осы қисыққа іштей сызылған сынықтың ұзындықтарының қосындысының максимал Δx_i нөлге ұмтылғандағы шегін айтамыз. Оны $I(L)$ арқылы белгілейміз.

$$I(L) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} I_n\ .$$

Ұзындығы бар қисық (егер көрсетілген шек табылса), *түзетілетін* деп аталады.

Теорема 1. $[a,b]$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын $y = f(x)$ функциясының графигі түзетілетін болады және оның ұзындығы былай есептелінеді:

$$I(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\ .$$

Салдар 1. L қисығы жазықтықта үзіліссіз дифференциалданатын параметрлік функцияның көмегімен берілген

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ t \in [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Онда бұл қисық түзетілетін болады және оның ұзындығы былай есептелінеді:

$$I(L) = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\ .$$

Ескерту. Жоғарыда алынған формулалардың кеңістіктегі L қисығы үшін де жалпыланатынын тексеруге болады. Егер L қисығы кеңістікте үзіліссіз дифференциалданатын параметрлік функцияның көмегімен берілсе

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \\ t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

онда оның ұзындығы мына формула бойынша есептеледі:

$$I(L)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt\,.$$

Мысал 5. Параметрлік теңдеумен берілген винттік сызықтың бір орамының ұзындығын тап

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \\ z=bt, \\ t\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

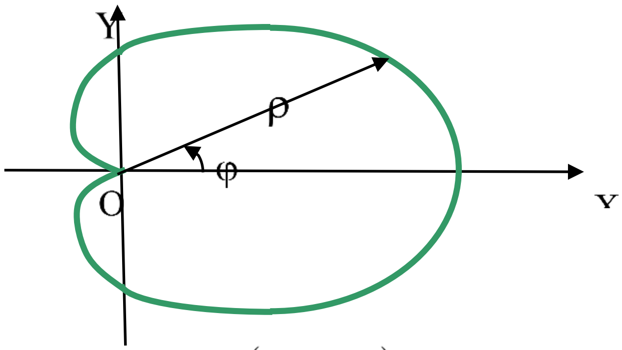
Бұл функцияның туындыларын формулаға қойсақ :

$$I(L)=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2}\,.$$

Салдар 2. L қисығы полярлық координатада үзіліссіз дифференциалданатын теріс емес функция $\rho=f(\varphi)$, мұндағы $\varphi\in[\alpha,\beta]$, арқылы берілген. Онда бұл қисық түзетілетін және оның ұзындығы:

$$I(L)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f(\varphi))^2+(f'(\varphi))^2}\,d\varphi\,.$$

Мысал 6. $\rho=a(1+\cos\varphi)\ \ (a>0)$ теңдеуімен берілген кардиоиданың ұзындығын тап (сурет 35).



Сурет 35

$\rho=a(1+\cos\varphi)$

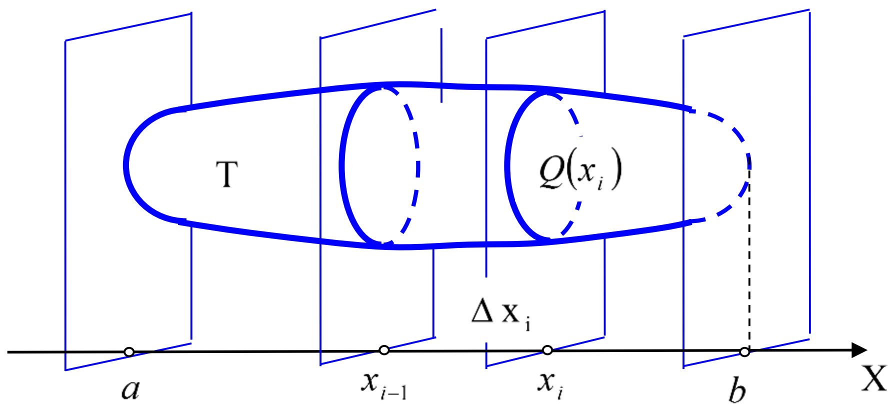
Барлық φ үшін $a(1+\cos\varphi)\ge 0$ болғандықтан:

$$I(L)=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi=2a\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi=$$

$$=2a\left(\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi-\int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi\right)=4a\left(\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}-\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi}\right)=4a(1+1)=8a\,.$$

3. Анықталған интегралдың көмегімен айналу денелерінің көлемін есептеу.

Кеңістікте T денесі мен Ox осі берілсін. Ox осінің x нүктесі арқылы жүргізілген осы оське перпендикуляр жазықтық пен T денесінің қиылысу нәтижесінде пайда болған облыстың ауданын $Q(x)$ арқылы белгілелік. T денесінің Ox осіне түсірілген проекциясы $[a,b]$ кесіндісі, яғни, $y=Q(x)$ функциясы осы кесіндіде анықталған. $[a,b]$ кесіндісінде $Q(x)$ функциясы үзіліссіз деп есептейік (сурет 36).



Сурет 36

[a,b] кесіндісін x_i нүктелерімен n бөлікке бөлеміз және әрбір $[x_{i-1},x_i]$ аралығында дененің көлемін биіктігі $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ және табанының ауданы $Q(c_i)$, мұндағы $c_i \in [x_{i-1},x_i]$ болатын цилиндрдің көлемімен ауыстырамыз. Нәтижесінде T көлемін жуық шамамен есептейтін формула аламыз

$$V(T) \approx \sum_{i=1}^{n} Q(c_i)\Delta x_i \ .$$

Бұл теңдікте максимал $\Delta x_i \to 0$ ұмтылады деп шекке көшсек, T көлемінің тура мәнін аламыз:

$$V(T) = \int_a^b Q(x)dx \ .$$

Егер T денесі $[a,b]$ аралығында $y = f(x)$ үзіліссіз функциямен берілген қисық сызықты трапеция Ox осімен айналғанда пайда болса, $Q(x)$ дөңгелегінің ауданы $Q(x) = \pi f(x)^2$ формуласымен табылады, яғни, $f(x)$ осы дөңгелектің радиусы. Айналу денесінің көлемі:

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx \ .$$

Мысал 7. $y = x^2$ функциясының графигімен берілген, мұндағы $x \in [0,1]$, қисық сызықты трапеция Ox осімен айналу кезінде пайда болған дененің көлемін тап. Жоғарыдағы формуланы қолдансақ:

$$V(T) = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

Ескерту. Жоғарыда көрсетілген қисық сызықты трапеция $a, b \geq 0$ және $f(x) \geq 0$ болғанда Oy осін айналсын. Онда айналу кезінде пайда болған дененің көлемі былай есептелінеді:

$$V(T) = 2\pi \int_a^b xf(x)dx \ .$$

Мысал 8. Алдыңғы мысалда берілген функцияның графигі Oy осін айналғанда пайда болған дененің көлемі: $V(T) = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2 dx = 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$

4. Айналу беттерінің аудандарын табу

$y = f(x)$, мұндағы $x \in [a, b]$ және $f(x) \geq 0$ үзіліссіз дифференциалданатын функцияның графигі Ox осін айналсын. Онда айналу денесінің бетінің ауданы H мына формуламен есептелінеді:

$$S(H) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \ .$$

Мысал 9. $z = x^2 + y^2$ параболоиданың $z = 1$ жазықтығымен шектелген бөлігінің бетінің ауданын тап. Бұл бет - $y = \sqrt{z}$, мұндағы $z \in [0,1]$ парабола бөлігінің Oz осін айналғанда пайда болатын бет. Сонымен, ізделінді аудан:

$$S(H) = 2\pi \int_0^1 \sqrt{z}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)^2}\,dz = 2\pi \int_0^1 \sqrt{z + \frac{1}{4}}\,dz =$$

$$= 2\pi \left.\frac{\left(z + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{4\pi}{3}\left(\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \approx 5{,}33 \ .$$